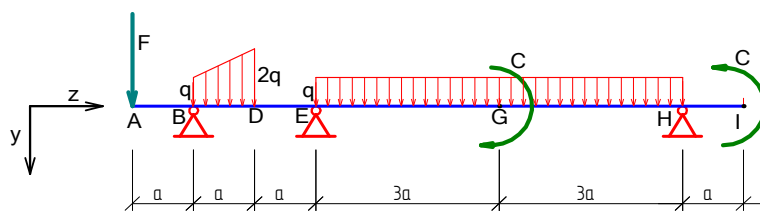


Con riferimento alla trave in figura



assumendo la soppressione del vincolo in B ai fini dell'applicazione del metodo delle forze si chiede di:

- classificare la struttura (labile, isostatica, iperstatica)
- determinare le reazioni vincolari
- si rappresentino i diagrammi delle sollecitazioni interne (T, M) in opportune scale, riportando anche le equazioni (indefinite di equilibrio delle singole travi o di equilibrio di porzioni di tronchi) dalle quali si sono dedotti i valori numerici riportati nei predetti diagrammi
- si rappresenti la deformata a maniera.

Si ponga: $a = 1$ [m], $C = 30$ [kNm], $F = 20$ [kN], $q = 15$ [kN/m],

~ ° ~

Classificazione struttura

i gradi di libertà g.d.l. sono $3 \cdot t = 3 \cdot 1 = 3$;

i gradi di vincolo (molteplicità) $s = 2 + 2 + 2 = 6$;
2 per ognuna delle cerniere in B, in H, in E.

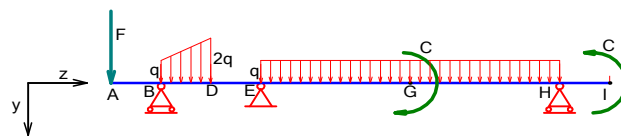
I centri di rotazione, relativi alle tre cerniere, non possono coincidere per cui la struttura non è labile

La struttura è 3 volte iperstatica.

Semplificazione

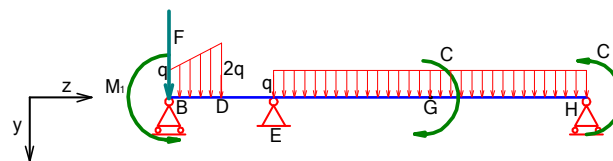
Sulla struttura non esistono carichi diretti secondo l'asse z.
Per questo: le componenti dei vincoli dirette lungo z saranno 0.

È possibile sostituire le cerniere in B ed in H con dei carrelli.



Si eliminano gli sbalzi AB ed HI, imponendo, nelle sezioni adiacenti, le azioni da esse prodotte

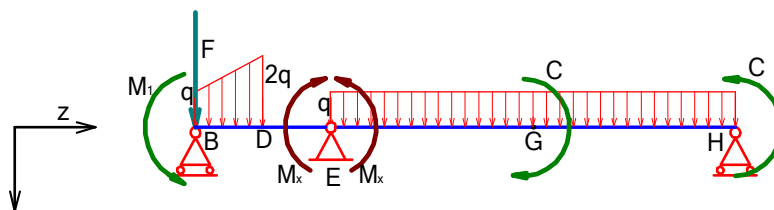
Nella sezione B agirà la forza F ed il momento
 $M_1 = F \cdot a$ mentre nella sezione H agirà la coppia C



Si noti che le due coppie in G ed in H hanno modulo uguale ma verso di rotazione opposto.

Per la soluzione del problema è necessario scegliere uno schema isostatico equivalente.

Esistono varie soluzioni.

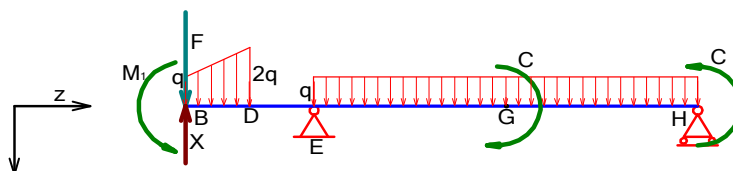


Una potrebbe essere quella di dividere la trave in due tronchi uniti dalla cerniera in E, questa da vincolo doppio diventa vincolo quadruplo in quanto ad essa sono legate due travi

Si aggiunge come incognita il momento M_k .

La traccia da indicazione di come effettuare la semplificazione, infatti chiede di eliminare il vincolo in B.

Lo schema relativo dalla traccia è raffigurato nel disegno che segue

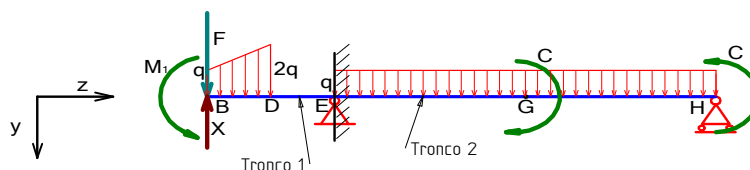


In esso il carrello in B è stato sostituito dalla sua reazione vincolare X da calcolare.

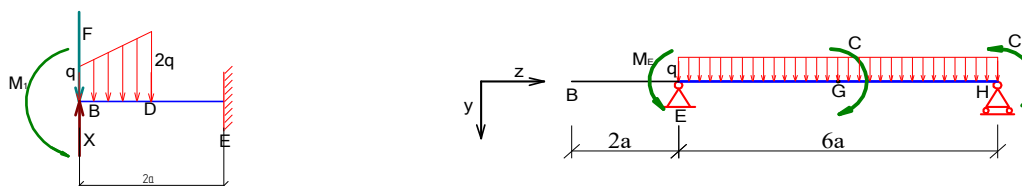
Ciò sarà fatto utilizzando gli schemi base per valutare lo spostamento della sezione B ed imponendolo pari a 0.

Per effettuare il calcolo si divide la trave in due parti.

La prima va dalla sezione B alla sezione E, la seconda dalla sezione E alla sezione H.



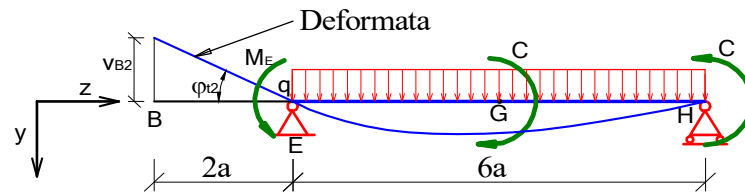
Separando le due parti, si ottengono due figure, riportate nei disegni che seguono.



Al tronco 1 è stato aggiunto un incastro in quanto esso risulta, all'origine, continuo con il tronco 2.

Al tronco 2 è stato aggiunto il tratto rigido BE per visualizzare il movimento di B in dipendenza dei carichi applicati

Analisi deformazione del Tratto 2



Nella figura è riportato il tronco 2 dove è indicata anche la sua possibile deformata.

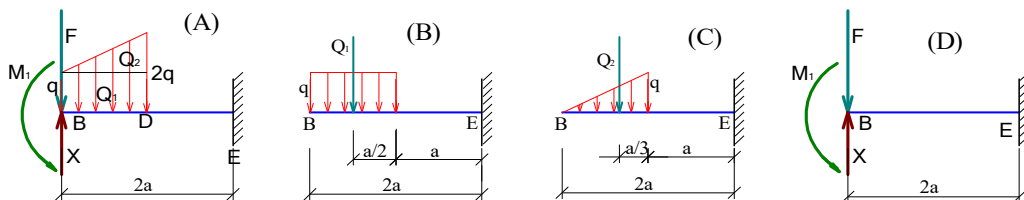
Nella sezione in E ci sarà una deformazione angolare φ_{12} che farà ruotare (nel disegno in senso orario) il tratto rigido BE per cui la sezione in B si solleverà di una quantità v_{B2} verso l'alto, (y negativo)

considerati i piccoli spostamenti si confonde il seno con l'angolo per cui vale la relazione

$$v_{B2} = \varphi_{12} \cdot L_{BE} = \varphi_{12} \cdot 2a$$

Sul tronco sono applicati: un carico continuo q e due momenti di modulo uguale C, ma con verso di rotazione opposto, un momento ME che rappresenta l'azione dei carichi agenti sul tratto BE

Vale il principio di sovrapposizione degli effetti per cui si valuteranno le deformazioni determinate dai singoli carichi e poi si effettuerà la somma algebrica.

Calcolo momento M_E 

Nella fig(A) è riportato il tratto BE con tutti i carichi applicati,

I vari carichi i producono ognuno un momento rispetto alla sezione E, il momento ME è la somma dei singoli momenti

Il carico continuo trapezoidale è stato diviso in due carichi: uno rettangolare ed uno triangolare.

Il carico Q_1 di intensità $Q_1 = q \cdot a$ darà un momento pari a $M_{Q1} = Q_1 \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right) = q \cdot a \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} q a^2$

$$M_{Q1} = \frac{3}{2} q a^2$$

Il carico Q_2 di intensità $Q_2 = \frac{q \cdot a}{2}$ darà un momento pari a $M_{Q2} = Q_2 \cdot \left(a + \frac{a}{3}\right) = \frac{q \cdot a}{2} \cdot \frac{4}{3}a = \frac{2}{3} q a^2$

$$M_{Q2} = \frac{2}{3} q a^2$$

La forza F produrrà un momento pari a $M_F = F \cdot 2a$

$$M_F = 2 F \cdot a$$

La forza X produrrà un momento negativo pari a $M_X = -X \cdot 2a$

$$M_X = 2 X \cdot a$$

Il momento M_1 in E non cambia di intensità si ricorda che $M_1 = F \cdot a$

Il momento M_E è la somma dei singoli momenti

$$M_E = M_{Q1} + M_{Q2} + M_F + M_x + M_1 = \frac{3}{2} q a^2 + \frac{2}{3} q a^2 + 2 F a - 2 X a + F a$$

$$M_E = \frac{13}{6} q a^2 + 3 F a - 2 X a$$

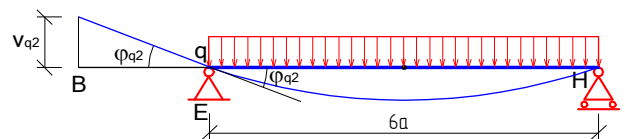
Calcolo deformazioni tratto 2

Per il calcolo delle deformazioni si farà riferimento alla tavola contenente soluzioni di problemi elastici notevoli
Si tenga presente che nel caso in esame $l = 6a$ e che in valore assoluto $C_1 = C_2 = C$

Carico Continuo

formula $\varphi_{q2} = -\frac{q \cdot l^3}{24 EI}$

che diventa $\varphi_{q2} = -\frac{q \cdot (6a)^3}{24 EI}$ $\varphi_{q2} = -\frac{9 q \cdot a^3}{EI}$



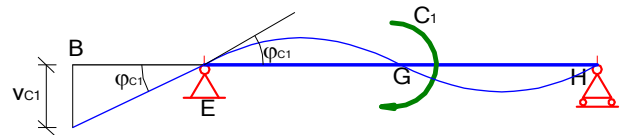
lo spostamento del punto B verso l'alto è $v_{q2} = \varphi_{q2} \cdot 2a = -\frac{9 q \cdot a^3}{EI} \cdot 2a = -18 \frac{q \cdot a^4}{EI}$

$$v_{q2} = -18 \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

Coppia in mezzzeria

formula $\varphi_{C1} = \frac{C_1 \cdot l}{24 EI}$

che diventa $\varphi_{C1} = \frac{C_1 \cdot 6a}{24 EI}$ $\varphi_{C1} = \frac{C_1 \cdot a}{4 EI}$



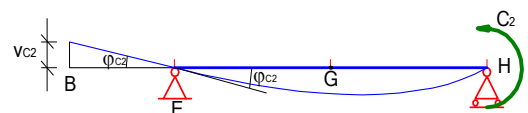
lo spostamento del punto B verso il basso è $v_{C1} = \varphi_{C1} \cdot 2a = \frac{C_1 \cdot a}{4 EI} \cdot 2a = \frac{1}{2} \frac{C_1 \cdot a^2}{EI}$

$$v_{C1} = \frac{1}{2} \frac{C_1 \cdot a^2}{EI}$$

Coppia sulla estremità H

formula $\varphi_{C2} = -\frac{C_2 \cdot l}{6 EI}$

che diventa $\varphi_{C2} = -\frac{C_2 \cdot 6a}{6 EI}$ $\varphi_{C2} = -\frac{C_2 \cdot a}{EI}$



lo spostamento del punto B verso l'alto è $v_{C2} = \varphi_{C2} \cdot 2a = -\frac{C_2 \cdot a}{EI} \cdot 2a = -2 \frac{C_2 \cdot a^2}{EI}$

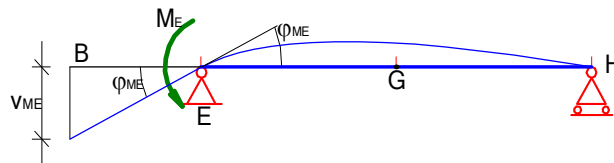
$$v_{C2} = -2 \frac{C_2 \cdot a^2}{EI}$$

Momento M_E

formula $\varphi_{ME} = \frac{M_E \cdot l}{3EI}$

che diventa $\varphi_{ME} = -\frac{M_E \cdot 6a}{3EI}$

$$\varphi_{ME} = -\frac{M_E \cdot 2a}{EI}$$



lo spostamento del punto B verso il basso è $v_{ME} = \varphi_{ME} \cdot 2a = \frac{M_E \cdot 2a}{EI} \cdot 2a = 4 \frac{M_E \cdot a^2}{EI}$ ma

$$M_E = \frac{13}{6} q a^2 + 3 F a - 2 X a$$

Sostituendo: $v_{ME} = \frac{4a^2}{EI} M_E = \frac{4a^2}{EI} \left(\frac{13}{6} q a^2 + 3 F a - 2 X a \right) = \frac{26}{3} \frac{q a^4}{EI} + 12 \frac{F a^3}{EI} - 8 \frac{X a^3}{EI}$

$$v_{ME} = \frac{26}{3} \frac{q a^4}{EI} + 12 \frac{F a^3}{EI} - 8 \frac{X a^3}{EI}$$

I singoli spostamento sono:

$$v_{q2} = -18 \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

$$v_{C1} = \frac{1}{2} \frac{C \cdot a^2}{EI}$$

$$v_{C2} = -2 \frac{C \cdot a^2}{EI}$$

$$v_{ME} = \frac{26}{3} \frac{q a^4}{EI} + 12 \frac{F a^3}{EI} - 8 \frac{X a^3}{EI}$$

Lo spostamento totale del punto B è la loro somma

$$v_{B2} = v_{q2} + v_{C1} + v_{C2} + v_{ME}$$

sostituendo $v_{B2} = -18 \frac{q \cdot a^4}{EI} + \frac{1}{2} \frac{C \cdot a^2}{EI} - 2 \frac{C \cdot a^2}{EI} + \frac{26}{3} \frac{q a^4}{EI} + 12 \frac{F a^3}{EI} - 8 \frac{X a^3}{EI}$

da cui

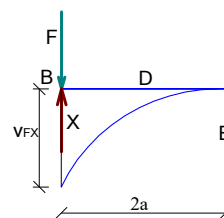
$$v_{B2} = -\frac{28}{3} \frac{q \cdot a^4}{EI} - \frac{3}{2} \frac{C \cdot a^2}{EI} + 12 \frac{F a^3}{EI} - 8 \frac{X a^3}{EI}$$

Analisi deformazione del tratto I

Si tenga presente che nel caso in esame $l=2a$ e che $M_1 = F \cdot a$

Forze F ed X

formula $v_B = \frac{F \cdot l^3}{3EI}$

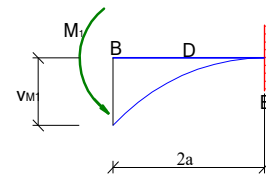


che diventa $v_{FX} = \frac{(F - X) \cdot (2a)^3}{3EI}$

$$v_{FX} = \frac{8}{3} \frac{F \cdot a^3}{EI} - \frac{8}{3} \frac{X \cdot a^3}{EI}$$

Momento M_1

formula
$$v_B = \frac{M \cdot l^2}{2 EI}$$



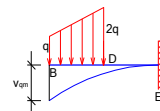
che diventa
$$v_{M1} = \frac{M_1 \cdot (2a)^2}{2 EI} = \frac{F \cdot a \cdot 4a^2}{2 EI} = 2 \frac{F \cdot a^3}{EI}$$

$$v_{M1} = 2 \frac{F \cdot a^3}{EI}$$

Carico Continuo

relazione trovata a parte

$$v_{qm} = \frac{289}{120} \frac{q \cdot a^4}{EI}$$



I singoli spostamenti sono

$$v_{qm} = \frac{289}{120} \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

$$v_{MT} = 2 \frac{F \cdot a^3}{EI}$$

$$v_{FX} = \frac{8}{3} \frac{F \cdot a^3}{EI} - \frac{8}{3} \frac{X \cdot a^3}{EI}$$

Lo spostamento totale del punto B è la somma dei singoli spostamenti

$$v_{B1} = v_{qm} + v_{MT} + v_{FX}$$

sostituendo
$$v_{B1} = \frac{289}{120} \frac{q \cdot a^4}{EI} + 2 \frac{F \cdot a^3}{EI} + \frac{8}{3} \frac{F \cdot a^3}{EI} - \frac{8}{3} \frac{X \cdot a^3}{EI}$$
 da cui
$$v_{B1} = \frac{289}{120} \frac{q \cdot a^4}{EI} + \frac{14}{3} \frac{F \cdot a^3}{EI} - \frac{8}{3} \frac{X \cdot a^3}{EI}$$

Calcolo reazione vincolare X

Nella sezione B è posizionato un carrello per cui la sezione non può subire spostamenti verticali

per cui deve essere $v_{B1} + v_{B2} = 0$

si è trovato :
$$v_{B1} = \frac{289}{120} \frac{q \cdot a^4}{EI} + \frac{14}{3} \frac{F \cdot a^3}{EI} - \frac{8}{3} \frac{X \cdot a^3}{EI} \quad v_{B2} = -\frac{28}{3} \frac{q \cdot a^4}{EI} - \frac{3}{2} \frac{C \cdot a^2}{EI} + 12 \frac{Fa^3}{EI} - 8 \frac{Xa^3}{EI}$$

sostituendo si ha
$$\frac{289}{120} \frac{q \cdot a^4}{EI} + \frac{14}{3} \frac{F \cdot a^3}{EI} - \frac{8}{3} \frac{X \cdot a^3}{EI} - \frac{28}{3} \frac{q \cdot a^4}{EI} - \frac{3}{2} \frac{C \cdot a^2}{EI} + 12 \frac{Fa^3}{EI} - 8 \frac{Xa^3}{EI} = 0$$

da cui
$$-\frac{277}{40} q \cdot a^2 + \frac{50}{3} F \cdot a - \frac{3}{2} C = \frac{32}{3} X \cdot a \quad X = \frac{3}{32a} \cdot \left(-\frac{277}{40} q \cdot a^2 + \frac{50}{3} F \cdot a - \frac{3}{2} C \right)$$

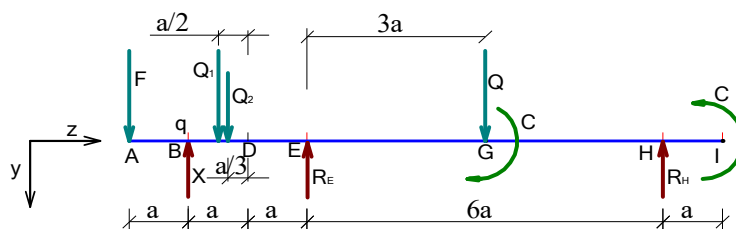
si ricorda: $a = 1$ [m], $C = 30$ [kNm], $F = 20$ [kN], $q = 15$ [kN/m],

$$X = \frac{3}{32 \cdot 1} \cdot \left(-\frac{277}{40} 15 \cdot 1^2 + \frac{50}{3} 20 \cdot 1 - \frac{3}{2} 30 \right) \quad X = 17,29 \text{ [kN]}$$

la positività del risultato significa che il verso posto alla X è esatto.

Calcolo Reazioni vincolari

Si considera il corpo libero associato, sostituendo ai carichi continui i carichi puntuali equivalenti.



Si considera l'equilibrio alla rotazione attorno alla sezione H

$$\sum M_z^{(H)} = 0 \quad F \cdot 9a - X \cdot 8a + Q_1 \cdot \left(7a + \frac{a}{2}\right) + Q_2 \cdot \left(7a + \frac{a}{3}\right) - R_E \cdot 6a + Q \cdot 3a - C_1 + C_2 = 0$$

I carichi valgono $Q = q \cdot 6a \quad Q_1 = q \cdot a \quad Q_2 = \frac{q \cdot a}{2} \quad |C_1| = |C_2| = C$

Sostituendo si ha. $F \cdot 9a - X \cdot 8a + q \cdot a \cdot \left(7a + \frac{a}{2}\right) + \frac{qa}{2} \cdot \left(7a + \frac{a}{3}\right) - R_E \cdot 6a + q \cdot 6a \cdot 3a = 0$

da cui $F \cdot 9a - X \cdot 8a + q \cdot a^2 \cdot \left(7 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} + \frac{1}{6} + 18\right) - R_E \cdot 6a = 0 \quad F \cdot 9a - X \cdot 8a + \frac{175}{6} q \cdot a^2 - R_E \cdot 6a = 0$

Le reazioni saranno:

$$R_E = \frac{1}{6a} \left(F \cdot 9a - X \cdot 8a + \frac{175}{6} q \cdot a^2 \right) \quad R_E = \frac{1}{6} \left(F \cdot 9 - X \cdot 8 + \frac{175}{6} q \cdot a \right)$$

$$R_E = \frac{1}{6} \left(20 \cdot 9 - 17,3 \cdot 8 + \frac{175}{6} 15 \cdot 1 \right) = 79,85 [kN]$$

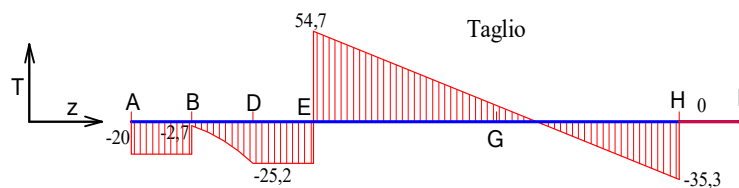
$$R_E = 79,85 [kN]$$

$$\sum F_y = 0 \quad F - X + Q_1 + Q_2 + Q - R_E + R_H = 0 \quad R_H = 20 - 17,3 - 79,9 + 15 + \frac{15}{2} + 15 \cdot 6$$

$$R_H = 35,3 [kN]$$

Diagrammi e deformata

Taglio



In A c'è la forza F diretta verso il basso; il taglio assume un valore negativo pari a -20 [kN].

Sul tratto AB il taglio è costante e pari a -20 .

Nella sezione B c'è la reazione X per cui sulle due facce avremo tagli diversi: $T_{BS} = -20$ [kN]

$$T_{BD} = -20 + 17,3 = -2,7 \text{ [kN]}$$

Nel tratto BD è presente un carico continuo $q(z)$ variabile linearmente per cui il taglio varierà con andamento parabolico

$$\text{Nella sezione D il taglio sarà: } T_D = T_{BD} - Q_t = -2,7 - \frac{(15+30) \cdot 1}{2} = -25,2 \text{ [kN]}$$

Sul tratto DE il taglio è costante e pari a $-25,2$.

Nella sezione D c'è la reazione R_E , sulle due facce avremo tagli diversi: $T_{ES} = -25,2$ [kN]

$$T_{ED} = -25,2 + 79,85 = 54,65 \text{ [kN]}$$

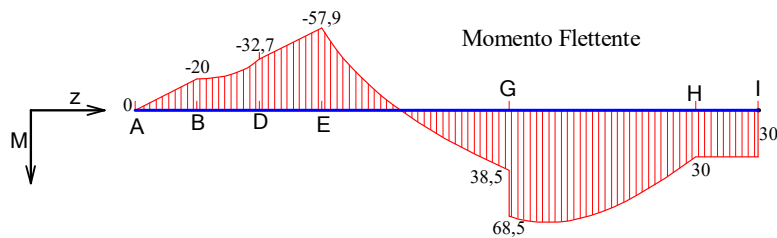
Nel tratto EH è presente un carico costante q per cui il taglio varierà con andamento lineare

$$\text{Nella sezione H il taglio sarà: } T_H = T_{ED} - Q_c = 54,7 - 15 \cdot 6 = -35,3 \text{ [kN]}$$

Nella sezione H c'è la reazione R_H , sulle due facce avremo tagli diversi: $T_{HS} = -35,3$ [kN]

$$T_{HD} = -35,3 + 35,3 = 0 \text{ [kN]}$$

Sul tratto HI il taglio è costante e pari a 0

Momento

Nella sezione A il momento è $M_A = 0 [kNm]$

Nel tratto AB il momento varia linearmente in quanto il taglio è costante.

Nella sezione B il momento vale $M_B = M_A - 20 \cdot 1 = -20 [kNm]$

Nel tratto BD il momento ha un variabile con andamento cubico

Nella sezione D il momento vale

$$M_D = M_B + T_{BD} \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = -2,7 \cdot 1 - 20 - 15 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -32,7 [kNm]$$

Nella sezione E il momento si calcola in modo analogo e vale $M_E = -57,9 [kNm]$

Partendo dalla estremità I

Nella sezione I, di estremità, è presente la coppia C per cui il momento è $M_I = 30 [kNm]$

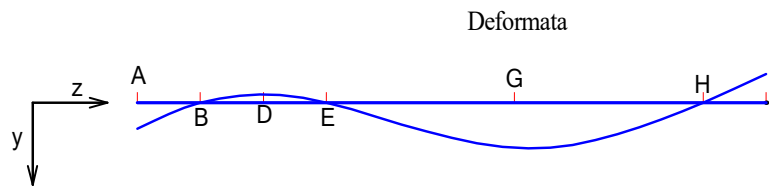
Nel tratto HI il momento è costante

Sul tratto EGH il momento assume andamento parabolico per la presenza del carico continuo

Nella sezione G la presenza della coppia C fa sì che sulle due facce si saranno due valori $M_{GD} = 38,5 [kNm]$ e

$$M_{GE} = 68,5 [kNm]$$

Deformata



La deformata deve passare per i punti B, D, E

La coppia in I fa sollevare la sezione

La forza F in A fa abbassare la sezione

Tra le sezioni BD ed EH si ha un andamento variabile le massime deformazioni non coincidono con le sezioni in mezzeria