

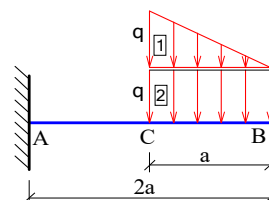
Calcolo deformazione trave a mensola con carico continuo su metà campata



Si vuole calcolare lo spostamento v_B della sezione B per una trave lunga $2a$ caricata per la sua metà esterna da un carico trapezoidale, aventi basi q e $2q$.

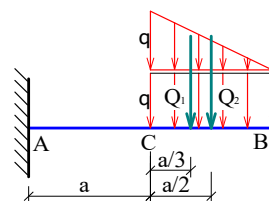
Si divide il carico applicato in due

- un carico costante di intensità q agente sul tratto CB
- un carico variabile linearmente, agente anche esso sul tratto CB, che assume valore 0 nella sezione di estremità e valore q alla sezione C.



Si considerano i carichi localizzati equivalenti ai due carichi continui

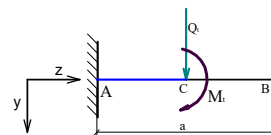
- Q_1 per il carico variabile, applicato nel baricentro del triangolo in una sezione distata $\frac{a}{3}$ rispetto alla sezione C
- Q_2 per il carico costante, applicato nel baricentro del rettangolo in una sezione lontana $\frac{a}{2}$ rispetto alla sezione C



Rispetto alla sezione C queste due forze generano due momenti rispettivamente M_1 ed M_2

È possibile valutare i moduli delle forze dei momenti

Forze : $Q_1 = \frac{q \cdot a}{2}$ $Q_2 = q \cdot a$



Momenti $M_1 = \frac{Q_1 \cdot a}{3} = \frac{q \cdot a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{1}{6} q \cdot a^2$ $M_2 = \frac{Q_2 \cdot a}{2} = q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2} q \cdot a^2$

I totali saranno

$$Q_t = Q_1 + Q_2 = \frac{q \cdot a}{2} + q \cdot a = \frac{3}{2} q \cdot a \quad M_t = M_1 + M_2 = \frac{1}{6} q \cdot a^2 + \frac{1}{2} q \cdot a^2 = \frac{2}{3} q \cdot a^2$$

Considerando la figura disegnata a lato è possibile valutare spostamento e rotazione della sezione C e da queste calcolare spostamento e rotazione della sezione B

Dagli schemi notevoli si ricavano le relazioni generali

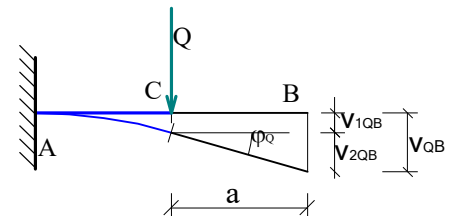
Per una forza F si ha: spostamento $v_{CF} = \frac{F \cdot l^3}{3EI}$ rotazione $\varphi_{CF} = -\frac{F l^2}{2EI}$

Per un momento M: spostamento $v_{CM} = \frac{M \cdot l^2}{2EI}$ rotazione $\varphi_{CM} = -\frac{M l}{EI}$

Si valutano adesso le deformazione della sezione B dovute ai singoli carichi

Carico Q

Il carico produce nella sezione C uno spostamento ed una rotazione



Spostamento $v_{CQ} = \frac{F \cdot l^3}{3EI} = \frac{Q \cdot a^3}{3EI} = \frac{3}{2} q \cdot a \cdot \frac{a^3}{3EI} = \frac{1}{2} \frac{q \cdot a^4}{EI}$

Rotazione $\varphi_{CQ} = -\frac{F l^2}{2EI} = -\frac{Q \cdot a^2}{2EI} = \frac{3}{2} \frac{q \cdot a \cdot a^2}{2EI} = -\frac{3}{4} \frac{q \cdot a^3}{EI}$

Per lo spostamento della sezione B è possibile dividerlo in due parti v_{1QB} e v_{2QB}

v_{1QB} è uguale allo spostamento della sezione C per cui si ha: $v_{1QB} = v_{CQ} = \frac{1}{2} \frac{q \cdot a^4}{EI}$

v_{2QB} è dovuto alla rotazione della sezione C che fa abbassare la sezione C di una quantità

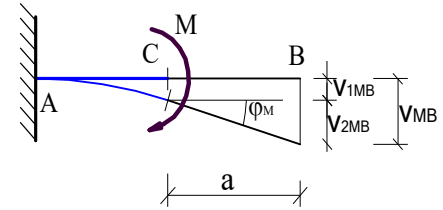
$$v_{2QB} = \varphi_{CQ} \cdot a = \frac{3}{4} \frac{q \cdot a^3 \cdot a}{EI} = \frac{3}{4} \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

Infine si ha: $v_{QB} = v_{1QB} + v_{2QB} = \frac{1}{2} \frac{q \cdot a^4}{EI} + \frac{3}{4} \frac{q \cdot a^4}{EI} = \frac{5}{4} \frac{q \cdot a^4}{EI}$

$$v_{QB} = \frac{5}{4} \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

Carico M

Anche il momento produce nella sezione C uno spostamento ed una rotazione



$$\text{Spostamento} \quad v_{CM} = \frac{M \cdot l^2}{2EI} = \frac{M_i \cdot a^2}{2EI} = \frac{2}{3} \frac{q \cdot a^2 \cdot a^2}{2EI} = \frac{1}{3} \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

$$\text{Rotazione} \quad \varphi_{CM} = -\frac{Ml}{EI} = -\frac{M_i a}{EI} = -\frac{2}{3} \frac{q \cdot a^2 \cdot a}{EI} = -\frac{2}{3} \frac{q \cdot a^3}{EI}$$

Anche per il momento lo spostamento della sezione B lo si divide in due parti v_{1MB} e v_{2MB}

$$v_{1MB} \text{ è uguale allo spostamento della sezione C per cui si ha: } v_{1MB} = v_{CM} = \frac{1}{3} \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

v_{2MB} è dovuto alla rotazione della sezione C che fa abbassare la sezione C di una quantità

$$v_{2MB} = \varphi_{CM} \cdot a = \frac{2}{3} \frac{q \cdot a^3 \cdot a}{EI} = \frac{2}{3} \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

$$\text{Infine si ha: } v_{MB} = v_{1MB} + v_{2MB} = \frac{1}{3} \frac{q \cdot a^4}{EI} + \frac{2}{3} \frac{q \cdot a^4}{EI} = \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

$$v_{MB} = \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

$$\text{Lo spostamento complessivo della sezione è } v_{tB} = v_{QB} + v_{MB} = \frac{5}{4} \frac{q \cdot a^4}{EI} + \frac{q \cdot a^4}{EI} = \frac{9}{4} \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

A questi valori si deve aggiungere l'azione del carico continuo sul tratto BC, che valgono

$$v_{qB} = \frac{19}{120} \frac{q \cdot a^4}{EI} \quad \varphi_{qB} = -\frac{5}{24} \frac{q \cdot a^3}{EI}$$

La freccia e la rotazione totale della sezione b sono:

$$v_B = v_{qB} + v_{tB} = \frac{19}{120} \frac{q \cdot a^4}{EI} + \frac{9}{4} \frac{q \cdot a^4}{EI} = \frac{289}{120} \frac{q \cdot a^4}{EI}$$

$$\varphi_B = \varphi_{CQ} + \varphi_{CM} + \varphi_{qB} = -\frac{3}{4} \frac{q \cdot a^3}{EI} - \frac{2}{3} \frac{q \cdot a^3}{EI} - \frac{5}{24} \frac{q \cdot a^3}{EI} = -\frac{13}{8} \frac{q \cdot a^3}{EI}$$