

Calcolo deformazione trave a mensola con carico continuo su metà lunghezza

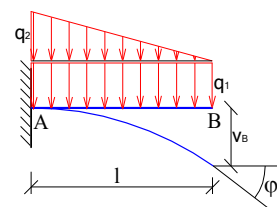


Con riferimento alla trave raffigurata, lunga $2a$ e caricata per la sua metà esterna da un carico trapezoidale, aventi basi q e $2q$, si vuole calcolare lo spostamento v_B e la rotazione φ_B della sezione B

Premessa:

Considerando una trave soggetta per tutta la sua lunghezza ad un carico trapezoidale, per il calcolo conviene dividere il carico in due:

- un carico costante di intensità q_1 agente su tutta la lunghezza della trave
- un carico q_2 , variabile linearmente, che assume valore 0 nella sezione di estremità e valore q_2 alla sezione incastrata.



Lo spostamento e la rotazione della sezione B è la somma degli spostamenti e delle rotazioni dovuti ai singoli carichi.

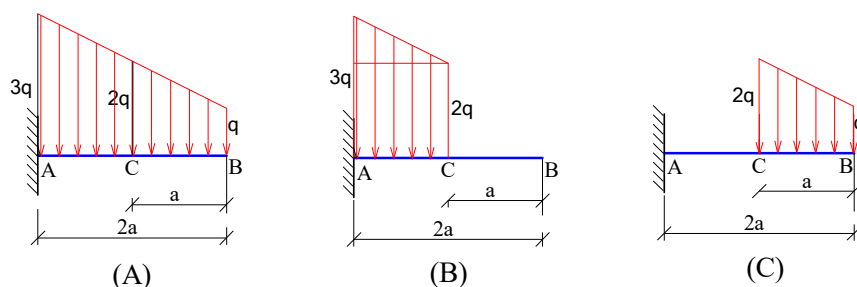
Per il carico 1 (q costante) si ha: spostamento $v_1 = \frac{q_1 \cdot l^4}{8EI}$ rotazione $\varphi_1 = -\frac{q_1 l^3}{6EI}$

Per il carico 2 (q variabile) si ha: spostamento $v_2 = \frac{q_2 \cdot l^4}{30EI}$ rotazione $\varphi_2 = -\frac{q_2 l^3}{24EI}$

Spostamento totale $v_t = v_1 + v_2$ $v_t = \frac{q_1 \cdot l^4}{8EI} + \frac{q_2 \cdot l^4}{30EI}$ $v_B = \frac{l^4}{EI} \cdot \left(\frac{q_1}{8} + \frac{q_2}{30} \right)$

Rotazione totale $\varphi_t = \varphi_1 + \varphi_2$ $\varphi_t = -\frac{q_1 l^3}{6EI} - \frac{q_2 l^3}{24EI}$ $\varphi_B = -\frac{l^3}{EI} \cdot \left(\frac{q_1}{6} + \frac{q_2}{24} \right)$

Analizzando le figure riportate



Si nota che la struttura desiderata (C) si ricava come sottrazione della figura (B) dalla figura (A)

È possibile calcolare le deformazioni relative alla figura (C) come differenza tra le deformazioni prodotte dalla struttura (A) con quelle relative alla struttura (B)

Si riportano le formule trovate in precedenza
$$v_t = \frac{l^4}{EI} \cdot \left(\frac{q_1}{8} + \frac{q_2}{30} \right) \quad \varphi_t = -\frac{l^3}{EI} \left(\frac{q_1}{6} + \frac{q_2}{24} \right)$$

Figura (A)

Si ha $q_1 = q \quad q_2 = 2q \quad l = 2a$

sostituendo :

$$v_t = \frac{(2a)^4}{EI} \cdot \left(\frac{q}{8} + \frac{2q}{30} \right) \quad v_t = \frac{16a^4}{EI} \cdot \left(\frac{q}{8} + \frac{2q}{30} \right) \quad \text{quindi: } v_{B(A)} = \frac{46}{15} \frac{qa^4}{EI}$$

$$\varphi_t = -\frac{(2a)^3}{EI} \left(\frac{q}{6} + \frac{2q}{24} \right) \quad \varphi_t = -\frac{8a^3}{EI} \left(\frac{q}{6} + \frac{2q}{24} \right) \quad \text{da cui } \varphi_{B(A)} = -2 \frac{qa^3}{EI}$$

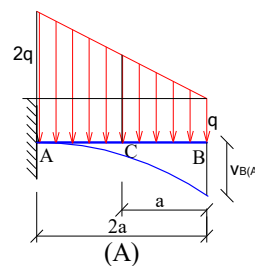


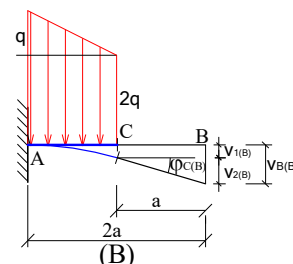
Figura (B)

Si ha $q_1 = 2q \quad q_2 = q \quad l = a$

sostituendo

$$v_{1(B)} = \frac{a^4}{EI} \cdot \left(\frac{2q}{8} + \frac{q}{30} \right) \quad v_{1(B)} = \frac{qa^4}{EI} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{30} \right) \quad \text{quindi } v_{1(B)} = \frac{17}{60} \frac{qa^4}{EI}$$

$$\varphi_{C(B)} = -\frac{a^3}{EI} \left(\frac{2q}{6} + \frac{q}{24} \right) = -\frac{qa^3}{EI} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{24} \right) \quad \text{quindi } \varphi_{C(B)} = -\frac{3}{8} \frac{qa^3}{EI}$$



Lo spostamento dovuto alla rotazione in C $v_{2(B)} = \varphi_{C(B)} \cdot a = \frac{3}{8} \frac{qa^3}{EI} \cdot a = \frac{3}{8} \frac{qa^4}{EI}$

La rotazione della sezione C sarà uguale alla rotazione della sezione B

Lo spostamento totale relativo alla figura (B) è

$$v_{B(B)} = v_{1(B)} + v_{2(B)} \quad v_{B(B)} = \frac{3}{8} \frac{qa^4}{EI} + \frac{17}{60} \frac{qa^4}{EI} = \frac{79}{120} \frac{qa^4}{EI}$$

Lo spostamento cercato della sezione B sarà dato dalla differenza tra i valori trovati

$$v_B = v_{B(A)} - v_{B(B)} \quad v_B = \left(\frac{46}{15} - \frac{79}{120} \right) \frac{qa^4}{EI} \quad \boxed{v_B = \frac{289}{120} \frac{qa^4}{EI}}$$

La rotazione della sezione B è

$$\varphi_B = \varphi_{B(A)} - \varphi_{B(B)} \quad \varphi_B = -2 \frac{q \cdot a^3}{EI} + \frac{3}{8} \frac{q \cdot a^3}{EI} \quad \boxed{\varphi_B = -\frac{13}{8} \frac{q \cdot a^3}{EI}}$$