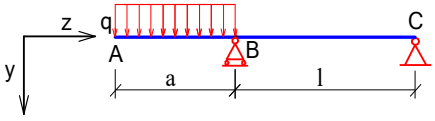
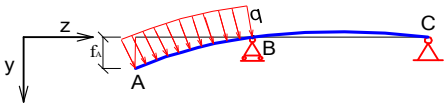
Calcolo deformazione trave appoggiata con sbalzo su cui agisce un carico continuo, utilizzando la linea elastica.

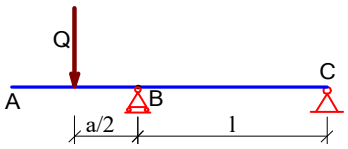


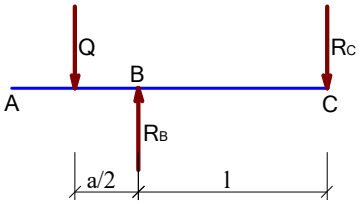


La trave raffigurata è lunga *l* ed ha uno sbalzo lungo a che è caricato con un carico continuo q.
Si vuole calcolare lo spostamento f_A della sezione A utilizzando le equazioni della linea elastica.

Calcolo Reazioni vincolari:

Si sostituisce al carico continuo il carico localizzato equivalente, posizionato nella sezione mediana dello sbalzo, quindi a distanza $\frac{a}{2}$ da B





Sfruttando le equazioni cardinali della statica si ricavano le reazioni vincolari R_B ed R_C

Si ottiene $R_B = q \cdot a \cdot \frac{(a+2\,l)}{2\,l}$ e $R_C = q \cdot a \cdot \frac{a}{2\,l}$

Si ricordano le relazioni $M(z) = -EI \cdot \frac{d^2 v(z)}{d z^2}$ e $\varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$

Calcolo deformazioni.

Si divide la struttura in due tratti :

Tratto 1 dalla sezione A alla sezione B,
si assegna il pedice 1 a tutte le equazione relative al tratto 1
sia z_1 l' ascissa, che assume valore 0 nella sezione A e valore *a* nella sezione B

Tratto 2 dalla sezione B alla sezione C;
si assegnerà il pedice 2 a tutte le equazione relative al tratto 2
sia z_2 l' ascissa che assume valore 0 nella sezione B e valore *l* nella sezione C

Deformazioni **Tratto 1**

Le azioni interne valgono: $T_1(z_1) = -q \cdot z_1$ $M_1(z_1) = -q \cdot \frac{z_1^2}{2}$

Nella sezione A $z_1 = 0$ $T_1(0) = -q \cdot a$ $M_1(0) = 0$

Nella sezione B $z_1 = a$ $T_1(a) = -F$ $M_1(a) = -q \cdot \frac{a^2}{2}$

dalla relazione $M(z) = -EI \cdot \frac{d^2 v(z)}{d z^2}$

si può scrivere $-q \cdot \frac{z_1^2}{2} = -EI \cdot \frac{d^2 v_1(z_1)}{d z_1^2}$ quindi $\frac{d^2 v_1(z_1)}{d z_1^2} = \frac{q \cdot z_1^2}{2\,EI}$

integrando si ottiene $\frac{d v_1(z_1)}{d z_1} = \frac{1}{6} \frac{q \cdot z_1^3}{EI} + C_1$ e $v_1(z_1) = \frac{1}{24} \frac{q \cdot z_1^4}{EI} + C_1 \cdot z_1 + C_2$

dalla relazione $\varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$ si ha $\varphi_1(z_1) = -\frac{1}{6} \frac{q \cdot z_1^3}{EI} - C_1$

Nella sezonr A si ha $z_1 = 0$ quindi $v_1(0) = \frac{1}{24} \frac{q \cdot 0^4}{EI} + C_1 \cdot 0 + C_2$ $v_1(0) = C_2$

Nella sezione B si ha $z_1 = a$ e $v_1(a) = 0$

Si ricava: $v_1(a) = \frac{1}{24} \frac{q \cdot a^4}{EI} + C_1 \cdot a + C_2$

Per la rotazione si ottiene $\varphi_1(a) = -\frac{1}{6} \frac{q \cdot a^3}{EI} - C_1$

Deformazioni Tratto 2

In Precedenza è stato trovato $R_B = q \cdot a \cdot \frac{(a + 2\,l)}{2\,l}$, $R_C = q \cdot a \cdot \frac{a}{2\,l}$ e $M_B = M_1(a) = -q \cdot \frac{a^2}{2}$

Le azioni interne sono:

Il taglio è costante e vale $T_z(z_2) = -Q + R_B = -q \cdot a + q \cdot a \cdot \frac{(a + 2\,l)}{2\,l}$ $T_z(z_2) = +q \frac{a^2}{2\,l}$

Nella sezione B si ha $M_B = M_1(a) = -q \cdot \frac{a^2}{2}$ $T_B(a) = +q \frac{a^2}{2\,l}$

Il momento è $M_2(z_2)=M_B+T_B\cdot z_2=-q\cdot\frac{a^2}{2}+q\,\frac{a^2}{2\,l}\cdot z_2$ $M_2(z_2)=-\frac{1}{2}\,q\cdot a^2+\frac{1}{2}\,\frac{q\,a^2}{l}\cdot z_2$

$$M_2(z_2)=-\frac{1}{2}\,q\cdot a^2\left(1-\frac{z_2}{l}\right)$$

dalla relazione $M(z)=-EI\cdot\frac{d^2v(z)}{d^2z}$ $-\frac{1}{2}q\cdot a^2\left(1-\frac{z_2}{l}\right)=-EI\cdot\frac{d^2v(z)}{d^2z}$

si ottiene $\frac{d^2\,v_2(z_2)}{d\,z_2^2}=\frac{1}{2}\,\frac{q\,a^2}{EI}\cdot\left(1-\frac{z_2}{l}\right)$

integrando $\frac{d\,v_2(z_2)}{d\,z_2}=\frac{1}{2}\,\frac{q\,a^2}{EI}\cdot\left(z_2-\frac{z_2^2}{2\,l}\right)+C_3$

integrando ancora $v_2(z_2)=\frac{1}{4}\,\frac{q\,a^2}{EI}\cdot\left(z_2^2-\frac{z_2^3}{3\,l}\right)+C_3\cdot z_2+C_4$

per le deformazioni angolari $\varphi(z)=-\frac{dv(z)}{dz}$ $\varphi(z)=-\frac{1}{2}\,\frac{q\,a^2}{EI}\cdot\left(z_2-\frac{z_2^2}{2\,l}\right)-C_3$

Nella sezione B $z_2=0$ $v_2(0)=\frac{1}{4}\,\frac{q\,a^2}{EI}\cdot\left(0^2-\frac{0^3}{3\,l}\right)+C_3\cdot 0+C_4=0$ $\boxed{C_4=0}$

$$\varphi(0)=-\frac{1}{2}\,\frac{q\,a^2}{EI}\cdot\left(0-\frac{0^2}{2\,l}\right)-C_3 \qquad \boxed{\varphi_2(0)=-C_3}$$

Nella sezione C $z_2=l$ $v_2(l)=\frac{1}{4}\,\frac{q\,a^2}{EI}\cdot\left(l^2-\frac{l^3}{3\,l}\right)+C_3\cdot l=0$

$$\frac{1}{4}\,\frac{q\,a^2}{EI}\cdot\left(\frac{2}{3}\,l^2\right)+C_3\cdot l=0 \qquad \boxed{C_3=-\frac{1}{6}\,\frac{q\,a^2}{EI}\,l}$$

da cui ci ricava $\boxed{\varphi_2(0)=\frac{1}{6}\,\frac{q\,a^2}{EI}\,l}$

<u>Calcolo della costante</u> C_1 , C_2

Nella sezione B le relazioni delle deformazioni calcolate nei due tratti devono dare valore uguale.

Sono quindi sono valide le uguaglianze $\varphi_1(a)=\varphi_2(0)$ $v_1(a)=0$

Ricordate le relazioni trovate in precedenza

$$\varphi_2(0)=\frac{1}{6}\frac{q\,a^2}{EI}l \qquad \varphi_1(a)=-\frac{1}{6}\frac{q\cdot a^3}{EI}-C_1$$

Sostituendo i $\varphi_1(a)=\varphi_2(0)$ si ha $-\frac{1}{6}\frac{q\cdot a^3}{EI}-C_1=\frac{1}{6}\frac{q\,a^2}{EI}l$

$$C_1=-\frac{1}{6}\frac{q\cdot a^3}{EI}-\frac{1}{6}\frac{q\,a^2}{EI}l$$

$$\boxed{C_1=-\frac{1}{6}\frac{q\cdot a^2}{EI}\cdot(a+l)}$$

$$v_1(0)=\frac{1}{24}\frac{q\cdot a^4}{EI}+C_1\cdot a+C_2=0$$

sostituendo C_1 $v_1(a)=\frac{1}{24}\frac{q\cdot a^4}{EI}-\left(\frac{1}{6}\frac{q\cdot a^2}{EI}\cdot(a+l)\right)\cdot a+C_2=0$

$$\frac{1}{24}\frac{q\cdot a^4}{EI}\left(a-4\cdot(a+l)\right)+C_2=0 \qquad C_2=\frac{1}{24}\frac{q\cdot a^3}{EI}\left(4\cdot l+3\cdot a\right)$$

ma si è ottenuto $v_1(0)=C_2$ $v_1(0)=\frac{1}{24}\frac{q\cdot a^3}{EI}\left(4\,l+3\,a\right)$

che rappresenta la deformazione della sezione A

La deformazione è: $f_A=\frac{1}{24}\frac{q\cdot a^3}{EI}\left(4\,l+3\,a\right)$

Verifica numerica

Si consideri una trave a sezione rettangolare di dimensioni $b = 100\ mm$ $h = 30\ mm$
Materiale: acciaio avente $E = 205000\ MPa$

Sulla trave agisce, sullo sbalzo, un carico continuo $q = 3\ \frac{kN}{m}$

Reazioni vincolari

$$R_B = q \cdot a \cdot \frac{(a + 2\,l)}{2\,l} \qquad R_B = 3000 \cdot 1 \cdot \frac{(1 + 2 \cdot 2)}{2 \cdot 2} = 3750\ kN$$

$$R_C = q \cdot a \cdot \frac{a}{2\,l} \qquad R_C = 3000 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} = 750\ kN$$

La lunghezza della trave è $l = 2\ m = 2000\ mm$ lo sbalzo è $a = 1\ m = 1000\ mm$

Il momento di inerzia è: $I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{100 \cdot 30^3}{12} = 225000\ mm^4$

Considerando la relazione trovata in precedenza $f_A = \frac{1}{24}\,\frac{q \cdot a^3}{EI}\,(4\,l + 3\,a)$

posto $q = 3\ \frac{kN}{m} = 3\ \frac{N}{mm}$

si ha

$$f_A = \frac{1}{24}\,\frac{q \cdot a^3}{EI}\,(4\,l + 3\,a) = \frac{1}{24}\,\frac{3 \cdot 1000^3}{205000 \cdot 225000}\,(4 \cdot 2000 + 3 \cdot 1000) = 29{,}810\ mm$$

