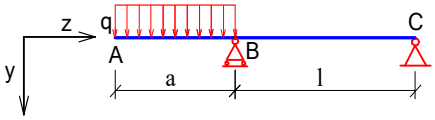
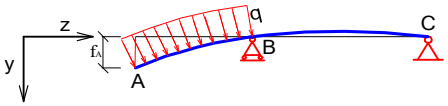
Calcolo deformazione trave appoggiata con sbalzo su cui agisce un carico continuo q.

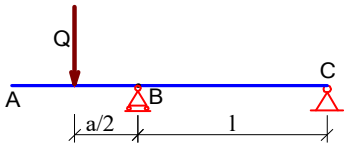


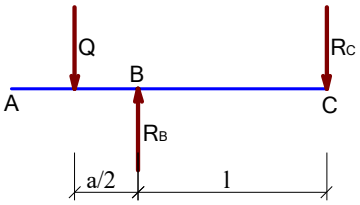


La trave raffigurata è lunga *l* ed ha uno sbalzo lungo *a e* caricato con un carico continuo q.
Si vuole calcolare lo spostamento f_A della sezione A utilizzando gli schemi notevoli.

Calcolo Reazioni vincolari:

Si sostituisce il carico continuo con un carico localizzato $Q = q \cdot a$ applicato alla distanza $\frac{a}{2}$ da A



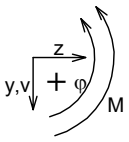


Utilizzando le equazioni cardinale della statica si calcolano le reazioni vincolari R_B e R_C

Si ottiene $R_B = q \cdot a \cdot \frac{(a+2\,l)}{2\,l}$ e $R_C = q \cdot a \cdot \frac{a}{2\,l}$

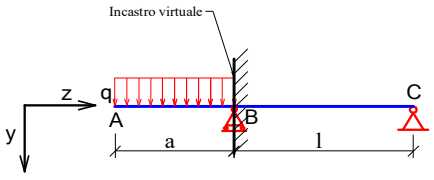
Premessa al calcolo.

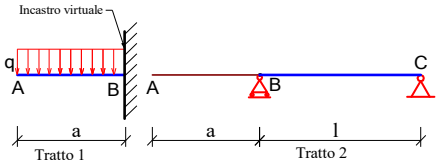
Per calcolo della freccia si utilizzeranno gli schemi notevoli.



Nella figura a lato sono rappresentate le quantità positive

Si divide la trave in due tratti AB e BC, si posiziona nella sezione B un incastro virtuale, come riportato nelle figure che seguono.



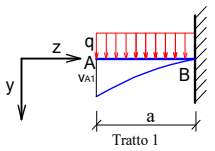


Si studia lo spostamento, relativo ad ogni tratto, della sezione A.

La deformazione totale sarà la somma algebrica dei valori trovati.

Tratto 1

Il tratto è una trave a sbalzo, incastrata nella sezione B



Lo spostamento e la rotazione della sezione A sono dovute al solo carico q che è applicato su su tutta la lunghezza dello sbalzo.

Le relazioni fondamentali, per la sezione A, sono:

spostamento $v_1 = \frac{q \cdot l^4}{8\,EI}$ rotazione $\varphi_1 = \frac{q\,l^3}{6\,EI}$

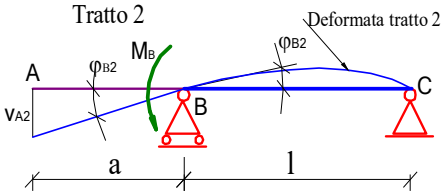
Applicandole al caso studiato: $v_{A1} = \frac{q \cdot a^4}{8\,EI}$ $\varphi_{A1} = \frac{q\,a^3}{6\,EI}$

Nell'incastro si ha: $v_{B1} = 0$ $\varphi_{B1} = 0$

Tratto 2

Il tratto 2 è una trave appoggiata caricata con un momento nella sezione B.

Sul lato B viene aggiunto un tratto rigido di lunghezza a, scarico.



Il momento in B dipende dal carico q e vale $M_B = q\,\frac{a^2}{2}$, esso produce una rotazione antioraria φ_{B2} della sezione B. Tutta l'asta AB ruota dello stesso angolo.

La relazione fondamentale della rotazione è: $\varphi_2 = \frac{C\,l}{3\,EI}$

Applicandole al tratto 2: $\varphi_{A2} = \frac{M_B\,l}{3\,EI}$ $v_{B2} = 0$

Sostituendo il momento si ha $\varphi_{A2} = \frac{q \cdot a^2 \cdot l}{6\,EI}$

Lo spostamento di A è : $v_{A2} = \varphi_{A2} \cdot a = \frac{q\,a^3\,l}{6\,EI}$

Infine lo spostamento totale è $f_A = v_{A1} + v_{A2} = \frac{q \cdot a^4}{8\,EI} + \frac{q\,a^3\,l}{6\,EI}$

$$f_A = \frac{1}{24}\,\frac{q \cdot a^3}{EI} \cdot (4\,l + 3\,a)$$

Verifica numerica

Si consideri una trave a sezione rettangolare di dimensioni $b = 100\ mm$ $h = 30\ mm$
Materiale: acciaio avente $E = 205000\ MPa$

Sulla trave, alla estremità dello sbalzo, agisce un forza $q = 3\ \frac{kN}{m}$

.
La lunghezza della trave è $l = 2\ m = 2000\ mm$ lo sbalzo è lungo $a = 1\ m = 1000\ mm$

Il momento di inerzia è: $I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{100 \cdot 30^3}{12} = 225000\ mm^4$

Considerando la relazione trovata in precedenza $f_A = \frac{1}{24} \frac{q \cdot a^3}{EI} \cdot (4\,l + 3\,a)$

posto $q = 3\ \frac{kN}{m} = 3\ \frac{N}{mm}$

si ha

$$f_A = \frac{1}{24} \frac{q \cdot a^3}{EI} \cdot (4\,l + 3\,a) = \frac{1}{24} \frac{3 \cdot 1000^3}{205000 \cdot 225000} \cdot (4 \cdot 2000 + 3 \cdot 1000) = 29{,}810\ mm$$

$$f_{At} = 29{,}81\ mm$$

