

MECCANICA APPLICATA E MACCHINE A FLUIDO

Sessione ordinaria 2014

Taccia n° 2

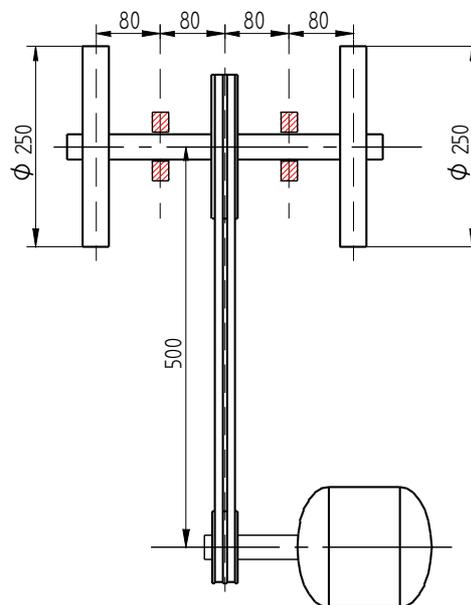
Lo schema in figura rappresenta una smerigliatrice con due mole, azionata da un motore elettrico, tramite una trasmissione con cinghie trapezoidali. L'albero di trasmissione delle mole è sostenuto, negli appoggi, da perni su cui sono montati due cuscinetti a sfere. I supporti delle mole e della puleggia della trasmissione a cinghie sono calettati sull'albero tramite linguette.

Si considerino i seguenti elementi di calcolo:

- potenza del motore elettrico $P = 2 \text{ kW}$
- numero di giri del motore elettrico: $n_1 = 2900 \text{ g/min}$
- numero di giri dell'albero di trasmissione: $n_2 = 1450 \text{ g/min}$

Nell'ipotesi di utilizzare alternativamente solo una delle due mole, il candidato, accompagnando il calcolo con considerazioni tecniche congrue e coerenti, dopo aver scelto un acciaio per l'albero ed aver fissato con motivati criteri ogni altro parametro o elemento di calcolo eventualmente mancante e necessario:

- determini la tipologia delle cinghie trapezoidali della trasmissione, da effettuare con due soli elementi;
- determini il diametro dell'albero di trasmissione e della relativa linguetta in corrispondenza della puleggia;
- operi la scelta dei cuscinetti a sfere per una durata di funzionamento pari a 10.000 ore.



Premessa: i calcoli saranno fatti facendo riferimento alla normativa e al “Manuale di meccanica “ ed. Hoepli

Ipotesi di soluzione

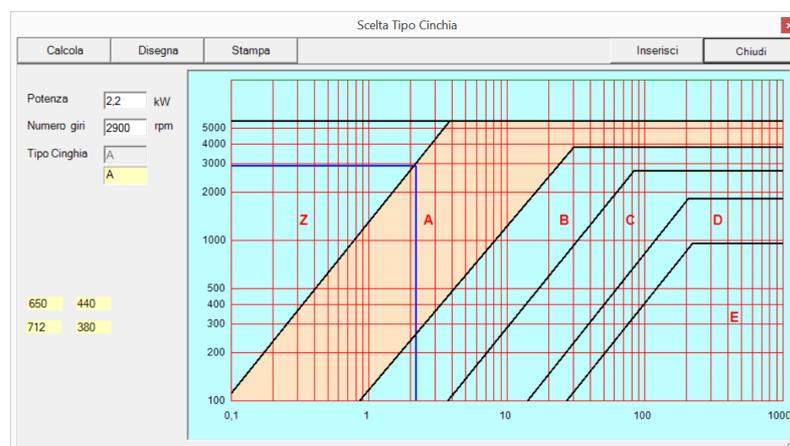
Scelta cinghia

Supponendo di utilizzare un motore elettrico a corrente alternata a coppia normale, servizio normale, orario di funzionamento entro le 8 giornaliere si ottiene un fattore di servizio $f_s = 1,1$

La potenza corretta sarà: $P_c = f_d \cdot P = 1,1 \cdot 2 = 2,2 \text{ [kW]}$

Nella traccia viene chiesto di utilizzare delle cinghie a sezione trapezoidale, si decide per un tipo di sezione convenzionale.

Con la potenza corretta P_c appena trovata e con i numeri di giri $n_1 = 2900 \text{ [giri/min]}$ dell'albero motore si ricava il tipo di sezione utilizzando il diagramma della scelta delle cinghie.



Si decide per una sezione di tipo **A**.

Calcolato il rapporto di trasmissione

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{2900}{2450} = 2$$

e tenendo presente le dimensioni dell'interasse $I = 500 \text{ mm}$ si scelgono i diametri primitivi delle due pulegge

$$\begin{aligned} d_1 &= 90 \text{ [mm]} \\ d_2 &= 180 \text{ [mm]} \end{aligned}$$

dove l'indice 1 è riferito all'albero motore e l'indice 2 è riferito all'albero condotto.

La lunghezza primitiva della cinghia sarà :

$$L_0 = 2 \cdot I + \frac{\pi}{2} \cdot (d_2 + d_1) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4 \cdot I} = 2 \cdot 500 + \frac{\pi}{2} \cdot (180 + 90) + \frac{(180 - 90)^2}{4 \cdot 500} = 1428,17 \text{ [mm]}$$

Saranno utilizzate due cinghie **A55** aventi come lunghezza primitiva $L_p = 1433 \text{ [mm]}$

E' quindi necessario variare l'interasse, per cui quello da utilizzare sarà

$$I_c = I - \frac{L_0 - L_p}{2} = 500 - \frac{1428,17 - 1433}{2} = 502,415 \text{ [mm]}$$

si decide per:

$$I_c = 503 \quad [mm]$$

Il calcolo della potenza delle cinghia si effettua considerando la puleggia a diametro inferiore ed utilizzando le relazioni fornite dalle norme UNI

la Potenza Base P_b è:

$$P_b = \left[\left(0,61 \cdot v^{-0,09} - \frac{26,68}{d_e} - 1,04 \cdot 10^{-4} \cdot v^2 \right) \cdot v \right] \cdot 0,7355 \quad [kW]$$

dove v è la velocità periferica e d_e è un diametro equivalente $d_e = F_b \cdot d_1$

Dal manuale si ha

$$F_b = 1,13$$

da cui

$$d_e = F_b \cdot d_1 = 1,13 \cdot 90 = 101,7 \quad [mm]$$

mentre per la velocità periferica vale:

$$v = \omega_1 \cdot r_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_1}{60} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2900}{60} \cdot \frac{90}{2} = 13666 \quad \left[\frac{mm}{s} \right] = 13,67 \quad \left[\frac{m}{s} \right]$$

Sostituendo nella equazione della potenza si ottiene

$$P_b = \left[\left(0,61 \cdot 13,67^{-0,09} - \frac{26,68}{101,7} - 1,04 \cdot 10^{-4} \cdot 13,67^2 \right) \cdot 13,67 \right] \cdot 0,7355 = 2,01 \quad [kW]$$

Per il calcolo della potenza effettiva è necessario individuare i due coefficienti F_α ed F_L dipendenti rispettivamente dall'angolo di avvolgimento e dalla lunghezza della cinghia.

L'angolo di avvolgimento relativo alla puleggia a diametro inferiore è:

$$\alpha_1 = 180 - 57 \frac{(d_2 - d_1)}{I_c} = 180 - 57 \frac{180 - 90}{503} = 169,80^\circ = 2,96 \quad [rad]$$

da cui:

$$F_\alpha = 1,25 \cdot \left(1 - 5^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} \right) = 1,25 \cdot \left(1 - 5^{-\frac{2,96}{\pi}} \right) = 0,98$$

e per la lunghezza $F_L = 1 + 2,4 \cdot \left[\left(\frac{L_r}{L_{po}} \right)^{0,09} - 1 \right]$ $F_L = 0,96$

Si calcola infine la potenza effettiva

$$P_e = P_b \cdot F_\alpha \cdot F_L = 2,01 \cdot 0,98 \cdot 0,96 = 1,91 \quad [kW]$$

Le due cinghie che devono essere installate sono in grado di trasmettere una potenza

$$P_t = 2 \cdot P_e = 2 \cdot 1,91 = 3,81 \quad [kW]$$

nettamente superiore ai 2 [kW] da trasmettere

Calcolo Albero

Valutazione carichi applicati

I carichi agenti sull'albero sono:

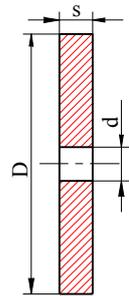
- i pesi delle due mole alle estremità dell'albero,
- il momento motore applicato alla puleggia calettata al centro dell'albero, il momento resistente dovuto alla azione di taglio che avviene su una mola alla volta,
- la forza di taglio, avente direzione tangenziale alla mola e la forza di appostamento radiale che spinge il pezzo a contatto con la mola,
- i tiri della cinghia.

Peso mola

Si ipotizza una mola in alundum avente massa volumica $\rho_{mo}=3980 \text{ kg/m}^3$, le dimensioni si ricavano dalle norme UNI, per un disco avente diametro di 250 mm si considera uno spessore $s_{mo}=32 \text{ mm}$ ed un diametro interno di 32 mm.

Trascurando il foro, si ha:

$$P_{mo} = g \cdot m_{mo} = g \rho_{mo} \cdot V_{mo} = g \cdot \rho_{mo} \cdot \pi \frac{d_{mo}^2}{4} \cdot s_{mo} = 9,81 \cdot 3980 \cdot \pi \frac{0,250^2}{4} \cdot 0,032 = 61 \text{ [N]}$$



considerando gli elementi che servono al posizionamento e fissaggio della mola si pone $P_{mo}=70 \text{ [N]}$

Momenti Torcenti

Dalla potenza applicata e dalla frequenza di rotazione dell'albero si ricava il momento agente sulle cinghie.

$$M_m = \frac{60 \cdot P}{2 \cdot \pi \cdot n_2} = \frac{60 \cdot 2000}{2 \cdot \pi \cdot 1450} = 13,171 \text{ [Nm]} = 13171 \text{ [Nmm]}$$

Il momento resistente è quello che agisce sulla mola, in condizioni di regime si dovrà avere:

$$M_m - M_R = J \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \text{da cui} \quad M_m = M_R$$

Forza di taglio e radiale

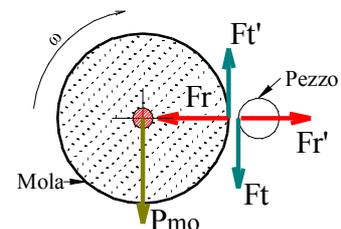
La forza di taglio si ricava facilmente dal momento resistente calcolato in precedenza.

La forza agente sull'albero sarà uguale ed opposta a quella che agisce sul pezzo, come evidenziato nella figura a lato

Si ha:
$$F_t' = \frac{2}{d_{mo}} \cdot M_R = \frac{2 \cdot 13171}{250} = 105,37 \text{ [N]}$$

Tra la mola ed il pezzo agisce anche una forza di appostamento radiale che, dalla letteratura tecnica, poniamo essere il doppio di quella di taglio

$$F_r = 2 \cdot F_t' = 2 \cdot 105,37 = 210,74 \text{ [N]}$$



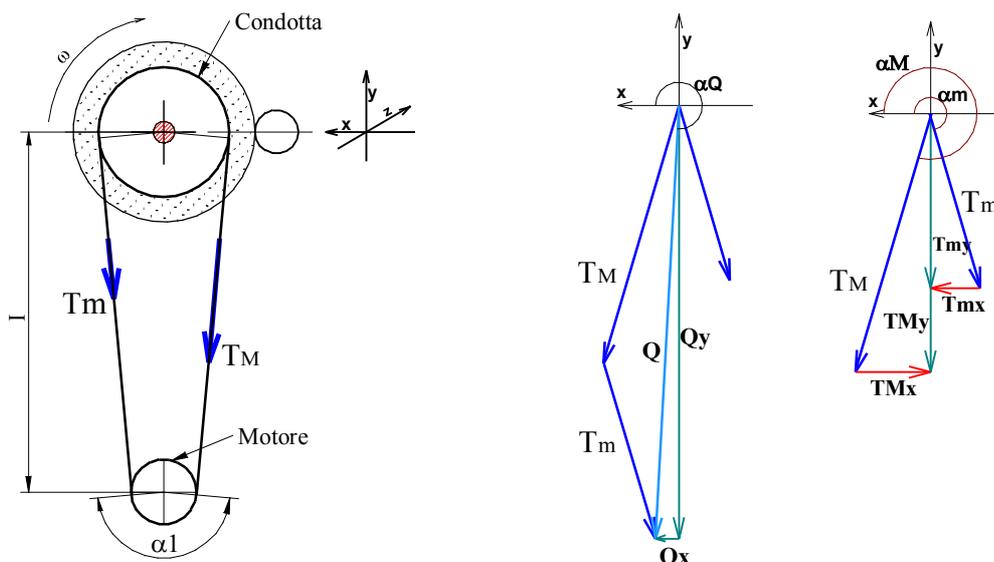
Tiri cinghia

Il calcolo dei tiri lo si effettua facendo riferimento alla potenza corretta e sulla puleggia a diametro inferiore.

Il momento torcente sarà:

$$M_{tl} = \frac{60 \cdot P_c}{2 \cdot \pi \cdot n_2} = \frac{60 \cdot 2200}{2 \cdot \pi \cdot 2900} = 7,244 \text{ [Nm]} = 7244 \text{ [Nmm]}$$

da cui si calcola la forza tangenziale



$$F_{tl} = \frac{2}{d_1} \cdot M_{tl} = \frac{2 \cdot 7244}{90} = 160,98 \text{ [N]}$$

il coefficiente di attrito sia: $f = 0,3$

le cinghie sono trapezoidali e ricordando che l'angolo di inclinazione della gola della puleggia è circa 40° si calcola il coefficiente effettivo di attrito:

$$f' = \frac{f}{\sin(20)} = \frac{0,3}{\sin(20)} = 0,33$$

Si calcolano adesso i due tiri motore T_M e mosso T_m

$$T_M = F_{tl} \cdot \frac{e^{f' \alpha}}{e^{f' \alpha} - 1} = 160,98 \cdot \frac{e^{0,33 \cdot 2,96}}{e^{0,33 \cdot 2,96} - 1} = 258,02 \text{ [N]}$$

$$T_m = F_{tl} \cdot \frac{1}{e^{f' \alpha} - 1} = 160,98 \cdot \frac{1}{e^{0,33 \cdot 2,96} - 1} = 97,03 \text{ [N]}$$

Dall'angolo di avvolgimento $\alpha_1 = 169,80^\circ$ trovato in precedenza si ricava gli angoli $\alpha_m = 275,10^\circ$ e $\alpha_M = 264,90^\circ$ tra i due tiri e l'asse delle x che permettono di ricavare le componenti dei due tiri.

$$T_{Mx} = T_M \cdot \cos(\alpha_M) = 258,02 \cdot \cos(264,90) = 22,93 \text{ [N]}$$

$$T_{My} = T_M \cdot \sin(\alpha_M) = 258,02 \cdot \sin(264,90) = -256,99 \text{ [N]}$$

$$T_{mx} = T_m \cdot \cos(\alpha_m) = 97,03 \cdot \cos(275,10) = -8,62 \text{ [N]}$$

$$T_{my} = T_m \cdot \sin(\alpha_m) = 97,03 \cdot \sin(275,10) = -96,65 \text{ [N]}$$

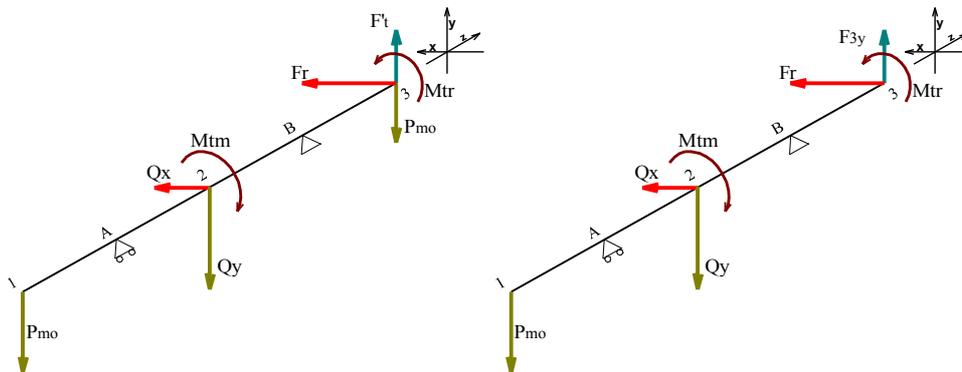
Chiamando Q il vettore somma dei due tiri le componenti di questo vettore si possono facilmente ricavare

$$Q_x = T_{Mx} + T_{mx} = 22,93 - 8,62 = 14,31 \text{ [N]}$$

$$Q_y = T_{My} + T_{my} = -256,99 - 96,65 = -353,64 \text{ [N]}$$

Schematizzazione

Si schematizza l'albero come una trave vincolata da una una cerniera ed un carrello.



Nelle figure disegnate sono riportate tutti carichi applicati ed i vincoli, i due cuscinetti sono stati sostituiti da una cerniera ed un carrello. Si applica la forza di taglio ad una sola delle due mole in quanto esse non possono lavorare in contemporanea, si sommano infine la forza di taglio ed il peso agenti sulla mola di destra.

$$F_{3y} = F_t - P_{mo} = 105,37 - 70 = 35,37 \text{ [N]}$$

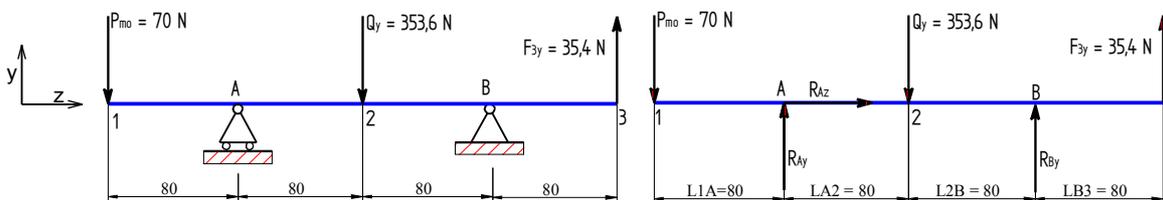
Le lettere indicano le posizioni dei vincoli i numeri le posizioni dei carichi.

Calcolo caratteristiche di sollecitazione

Il calcolo della reazioni vincolari e delle caratteristiche di sollecitazione sarà effettuato nei due piani x-z e y-z

Piano y-z

Si disegna la trave e poi il corpo libero associato sostituendo ai vincoli le relative reazioni,



Applicando le equazioni cardinali della statica si ricavano le reazioni¹

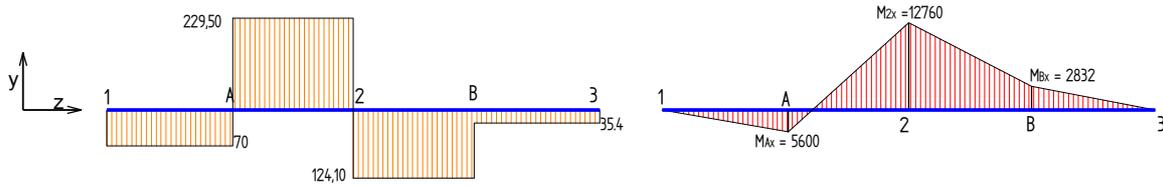
$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 & \quad R_{Az} = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad P_{mo} - R_{Ay} + Q_y - R_{By} + F_{3y} = 0 \\ \sum M_x = 0 & \quad P_{mo} \cdot L_{1A} - Q_y \cdot L_{A2} + R_{By} \cdot (L_{A2} + L_{2B}) + F_{3y} \cdot (L_{A2} + L_{2B} + L_{B3}) = 0 \end{aligned}$$

Con gli opportuni calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} R_{Az} &= 0 \text{ [N]} \\ R_{Ay} &= 299,50 \text{ [N]} \\ R_{By} &= 88,70 \text{ [N]} \end{aligned}$$

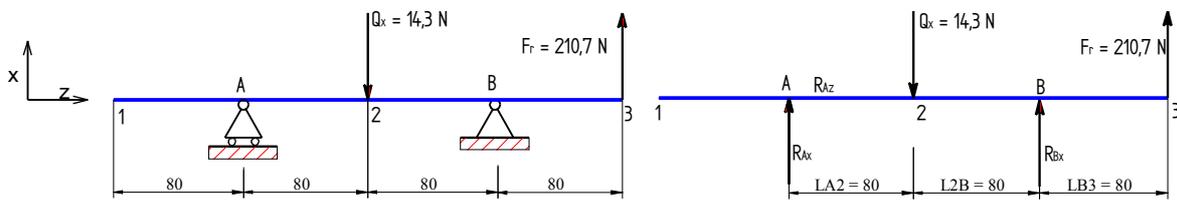
¹ nel calcolo si considera sempre positivo la prima forza o il primo momento trovato gli altri avranno segno positivo o negativo a seconda se sono concordi o discordi a quello iniziale

Si disegnano i diagrammi del taglio e del momento flettente



Piano x-z

Si opera in modo analogo a quanto fatto con il piano y-z, si disegna la trave e poi il corpo libero associato sostituendo ai vincoli le relative reazioni,



Si calcolano le reazioni vincolari

$$\sum F_x = 0 \quad R_{Ax} - Q_x + R_{Bx} + F_r = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad Q_x \cdot L_{A2} - R_{Bx} \cdot (L_{A2} + L_{2B}) - F_r \cdot (L_{A2} + L_{2B} + L_{B3}) = 0$$

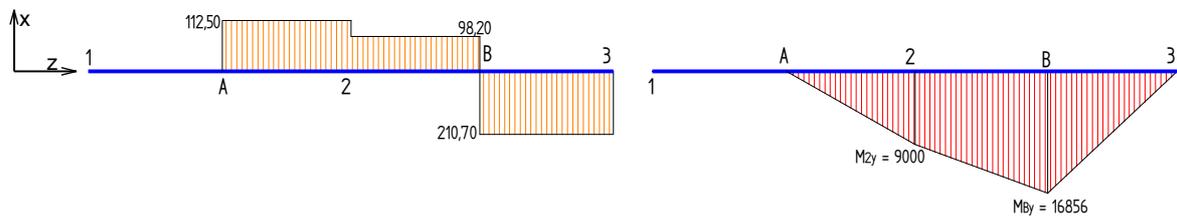
Con gli opportuni calcoli si ottiene

$$R_{Ax} = 112,50 \text{ [N]}$$

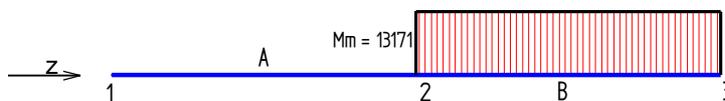
$$R_{Bx} = -308,50 \text{ [N]}$$

Il segno negativo della reazione significa che che il verso effettivo di R_{Bx} è opposto a quello scelto ovvero R_{Bx} va verso il basso.

Si disegnano i diagrammi del taglio e del momento flettente

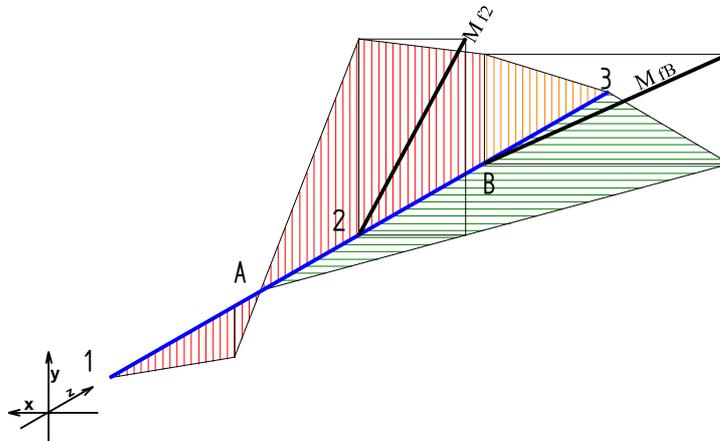


Infine si disegna la caratteristica del momento torcente



Carichi totali

Disegnando in assonometria i due diagrammi dei momenti trovati è facile vedere che le sezioni maggiormente sollecitate sono la sezione 2, dove è posizionata la puleggia e la sezione B sede di un cuscinetto.



I due momenti flettenti si ricavano facilmente

$$M_{f2} = \sqrt{M_{2x}^2 + M_{2y}^2} = \sqrt{12760^2 + 9000^2} = 15614,7 \text{ [N}\cdot\text{mm]}$$

$$M_{fB} = \sqrt{M_{Bx}^2 + M_{By}^2} = \sqrt{2832^2 + 16856^2} = 17092,2 \text{ [N}\cdot\text{mm]}$$

Per il calcolo delle tensioni nelle varie sezioni si ipotizza di ruotare il piano x-y attorno all'asse in modo che il momento totale ricavato coincida con l'asse delle x.

La tensione ideale di trazione si ricava utilizzando l'equazione di Henky Von Mises

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_N^2 + \sigma_f^2) + 3 \cdot \tau^2}$$

nel caso in esame si ha $\sigma_N = 0$

Scelta materiale e coefficiente di sicurezza statico

Come albero si sceglie un acciaio al carbonio C40 bonificato avente $R_m = 640 \text{ [N/mm}^2\text{]}$ e $R_s = 420 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
Si prende:

- grado di pericolosità elevato: $\gamma_{spe} = 1,70$
- grado di affidabilità elevato: $\gamma_{saf} = 1,20$
- grado di accettabilità normale: $\gamma_{sac} = 1,10$

Il coefficiente di sicurezza statico sarà:

$$\gamma_s = \gamma_{spe} \cdot \gamma_{saf} \cdot \gamma_{sac} = 1,70 \cdot 1,20 \cdot 1,10 = 2,24$$

È possibile calcolare la tensione normale ammissibile

$$\sigma_{am} = \frac{R_s}{\gamma_s} = \frac{420}{2,24} = 187,5 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

e la tensione tangenziale ammissibile

$$\tau_{am} = \frac{\sigma_{am}}{\sqrt{3}} = 108,25 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

Dai calcoli fatti in precedenza la sezione maggiormente sollecitata è la B applicando la equazione di stabilità si ha:

$$\sigma_{id} \leq \sigma_{am}$$

da cui

$$\sqrt{\left(\frac{M_{fB}}{W_f}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{M_t}{W_t}\right)^2} \leq \sigma_{am}$$

ricordando che per una sezione circolare si ha: $W_f = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ e $W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$

con gli opportuni passaggi si ottiene:

$$d_B \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \sigma_{am}} \cdot \sqrt{4 \cdot M_{fB}^2 + 3 \cdot M_t^2}}$$

sostituendo i valori

$$d_B \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi 187,5} \cdot \sqrt{4 \cdot 17092,2^2 + 3 \cdot 13171^2}} = 10,37 \text{ mm}$$

Per la sezione di estremità, dove è calettata la mole ed è sottoposta al solo momento torcente, si ricava:

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_m}{\pi \tau_{am}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 13171}{\pi 108,25}} = 8,52 \text{ mm}$$

Scelta diametri

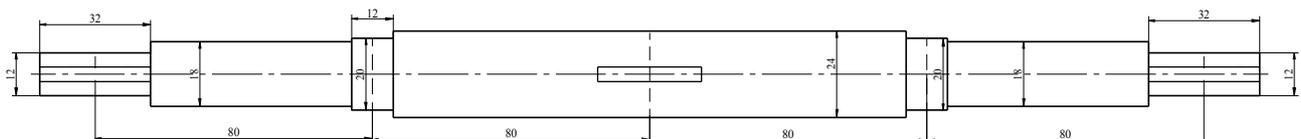
Nella traccia è previsto che la trasmissione del moto dall'albero alle mole sia fatta utilizzando una linguetta, questo comporta che nelle sezioni 3 ed 1 ci saranno delle cave per una linguetta.

Dalle norme sulle linguette si ricava che per un albero di diametro compreso tra 8 e 10 la cava abbia una profondità di 1,8 mm per cui queste sezioni devono avere un diametro minimo di 10,32 mm (8,52+1,8), le tabelle sulle linguette prevedono per un albero avente diametro compreso tra 10 e 12 mm la cava deve essere profonda 2,5 mm, per cui per avere il diametro resistente almeno pari a 8,5 si decide di assegnare alla sezione un diametro $d_3 = 12 \text{ mm}$.

Si prende come lunghezza della sede della mola una lunghezza di 32 mm pari allo spessore del disco della mola, per il suo posizionamento si prevede anche uno spallamento di 3 mm per cui il fusto compreso tra la sezione 3 e la sezione B si pone pari a 18.

Nella sezione B sarà calettato un cuscinetto avente diametro interno uguale a 20 mm e lunghezza $b = 12$, esso deve essere maggiore di quello del fusto per far scorrere il cuscinetto sull'albero fino alla sezione B

La restante parte dell'albero si porrà pari a 24 mm.



Scelta cuscinetti

I cuscinetti devono lavorare per almeno 10.000 ore, tenendo presente il numero di giri dell'albero condotto $n_2=1450$ [giri/min], permettono di calcolare facilmente il numero totale di cicli che il cuscinetto dovrà effettuare.

$$L_{10} = \frac{60 \cdot n \cdot h}{10^6} = \frac{60 \cdot 1450 \cdot 10000}{10^6} = 870 \quad [\text{milioni cicli}]$$

ricordato che la forza che agisce sul cuscinetto è la risultante delle due reazioni vincolari

$$R_{AT} = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{112,50^2 + 299,50^2} = 319,93 \quad [N]$$
$$R_{BT} = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = \sqrt{308,50^2 + 88,70^2} = 320,99 [N]$$

si calcola il carico dinamico minimo del cuscinetto che si vuole utilizzare

$$C_L = L_{10}^{\frac{1}{3}} \cdot R_T = 870^{\frac{1}{3}} \cdot 321 = 3064 \quad [N]$$

Dal manuale "I cuscinetti volventi" della SKF si ricava che sarà possibile utilizzare tutti i cuscinetti aventi diametro interno di 20 mm, si sceglie un cuscinetto con guarnizione incorporata su ambo i lati con denominazione 6004-Z avente larghezza di 12 mm.