Calcoli Economici

Nomenclatura

i = tasso interesse
n = numeri di periodi
P = valore attuale (capitale al tempo iniziale)
F = valore finale
A = rata di ammortamento
I = interesse maturato

Definizioni

Il denaro può essere considerato come una merce che viene: prestata, depositata, investita.

Definiamo **capitale *P*** una somma che si presta o si deposita o, ancora, si investe; al momento della sua restituzione**,** chi ha ricevuto il prestito (o il deposito) deve aggiungere, al capitale ricevuto, una somma che si definisce **interesse *I*** a pagamento per il suo uso.

Definita come ***F*** (valore finale) il totale maturato dopo un certo tempo si ha

$$F = P + I$$

In genere l'interesse è calcolato come percentuale del capitale iniziale.

$$I = i \cdot P$$

dove i è detto tasso di interesse valutato con riferimento ad un dato periodo di tempo che generalmente è un anno.

<u>Esempio 01</u>
Ipotizziamo di avere chiesto in prestito ad una banca la somma di 5000 € e di avere restituito dopo 10 anni la somma di 6000 €, in questo caso:

$$P = 5000\ €$$
$$F = 6000\ €$$
$$I = F - P = 5000 - 6000 = 1000\,€$$

Il calcolo degli interessi può essere fatto secondo due modalità:

- a **capitalizzazione semplice:** nel calcolo degli interessi, dei singoli periodi, si fa riferimento sempre e solo al capitale iniziale P:
- **a capitalizzazione composta:** per il calcolo degli interessi dei singoli periodi si fa riferimento al valore finale del periodo precedente, questo significa che gli interessi di un periodo si calcolano oltre che sul capitale anche sugli interessi già maturati.

Il tasso di interesse può variare nei vari periodi, noi consideriamo il caso in cui la ***i*** è costante.

Valutazione per deposito e ritiro in unica soluzione

Capitalizzazione semplice

In questo tipo di capitalizzazione, nel calcolo degli interessi dei singoli periodi, si fa riferimento sempre e solo al capitale iniziale ***P***.

$$I_n = i \cdot P$$

Con l'ipotesi che il tasso di interesse rimanga costante , negli anni, gli interessi anni maturati assumono sempre lo stesso importo, infatti:

$$I_1 = i \cdot P$$
$$I_2 = i \cdot P$$
$$....$$
$$I_n = i \cdot P$$
$$I_1 = I_2 .... = I_n = I = i \cdot P$$

per cui

$$F = P + I_1 + I_2 + ... + I_n = P + n \cdot I = P + n \cdot i \cdot P$$

da cui si ottengono le relazioni

$$\boxed{F = P(1+n \cdot i)} \qquad \boxed{\frac{F}{P} = 1+n \cdot i} \qquad \boxed{P = \frac{F}{1+n \cdot i}}$$

Esempio 02
Uno studente riceve, da uno zio, un prestito di 3000 € per l'acquisto di una moto. Lo zio si accontenta di un interesse semplice del 3% all'anno. Se lo studente restituisce il prestito dopo 4 anni, quanto deve restituire?
In questo caso
Capitale P= 3000 €, numero di periodi n = 4, interesse anno $i = 3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$

$$F = P \cdot (1+n \cdot i) = 3000 \cdot (1+4 \cdot 0{,}03) = 3360\, €$$

è facile ricavare che l'interesse totale vale: I= 360 €.

Esempio 03
Consideriamo l'esempio 01 e calcoliamo il tasso di interesse del prestito.

$$i = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{F}{P} - 1\right) = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{6000}{5000} - 1\right) = 0{,}02 = 2\%$$

Capitalizzazione composta

In questo tipo di capitalizzazione, nel calcolo degli interessi dei vari periodi, il calcolo degli interessi dei singoli periodi si effettua considerando capitale il valore al valore finale del periodo precedente, questo significa che gli interessi di un periodo si calcolano oltre che sul capitale anche sugli interessi già maturati:

$$I_n = i \cdot F_{n-1}$$

si ha: $I_1 = i \cdot P$

$$F_1 = P + I = P + i \cdot P = P \cdot (1+i)^1$$
$$F_2 = F_1 + i \cdot F_1 = F_1 \cdot (1+i) = P \cdot (1+i) \cdot (i+i) = P \cdot (1+i)^2$$
$$F_3 = F_2 + i \cdot F_2 = F_2 \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^2 \cdot (i+i) = P \cdot (1+i)^3$$

……....

$$F_n = F_{n-1} + i \cdot F_{n-1} = F_{n-1} \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^{n-1} \cdot (i+i) = P \cdot (1+i)^n$$

da cui le relazioni:

$$\boxed{F = P(1+i)^n} \qquad \boxed{\frac{F}{P} = (1+i)^n} \qquad \boxed{P = \frac{F}{(1+i)^n}}$$

la quantità $(1+i)^n$ viene chiamata fattore di interesse composto

<u>Esempio 04</u>

Una persona deposita in banca un importo 2500 € su un conto che rende il 2% all'anno.
Se non sono fatte altre operazioni, né di versamento né di prelievo, quanto danaro ci sarà sul conto dopo 5 anni? Si valutino i casi di capitalizzazione a) annuale, b) semestrale, c) trimestrale

a) capitalizzazione annuale, in questo caso il numero di periodi n corrisponde al numero di anni n_a=5, il tasso di interesse vale $i = 2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$ n = 5

si ha: $\boxed{F = P(1+i)^n = 2500 \cdot (1+0{,}02)^5 = 2760{,}20\,€}$

b) capitalizzazione semestrale, in questo caso in ogni anno ci sono due periodi per si ha

$$n = 2 \cdot n_a = 2 \cdot 5 = 10$$

il tasso di interesse vale $i = \frac{2\%}{2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{100} = 0{,}01$

si ha $\boxed{F = P(1+i)^n = 2500 \cdot (1+0{,}01)^{10} = 2761{,}56\,€}$

c) capitalizzazione trimestrale, in questo caso in ogni anno ci sono quattro periodi per si ha

$$n = 4 \cdot n_a = 4 \cdot 5 = 20$$

il tasso di interesse vale $i = \frac{2\%}{4} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{100} = 0{,}005$

si ha $\boxed{F = P(1+i)^n = 2500 \cdot (1+0{,}005)^{20} = 2762{,}24\,€}$

Si noti il fatto che più sono i periodi in un anno e maggiore è il valore finale.

Calcoli per pagamenti o versamenti in più soluzioni.

Rendita.
Per rendita si intende una successione di pagamenti fatti ad intervalli di tempo uguali; l'importo pagato è definito rata della rendita.
La rendita è definita annualità se il periodo corrisponde ad un anno, semestralità se corrisponde ad un semestre, mensilità se corrisponde ad un mese.
Le rate possono essere costanti o variabili.

Considerando una somma ***A*** che viene depositata ogni fine anno su un conto bancario, ipotizzando un tasso di interesse (costante) ***i*** a capitalizzazione annuale composta, la somma ***F*** che si avrà sul conto dopo ***n*** anni si ricava con la formula

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

Viceversa la relazione che segue permette di conoscere la rata ***A*** che si deve depositare, ogni fine anno, su un conto bancario, se si vuole avere dopo ***n*** anni avere accumulato un capitale pari a ***F***

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right]$$

Nel caso che le somme sono versate all'inizio del periodo e non alla fine si deve aggiungere un periodo di interesse per le formule diventano

$$F' = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]\cdot(1+i)$$

$$A' = F\left[\frac{i}{[(1+i)^n-1]\cdot(1+i)}\right]$$

Esempio 05
Si supponga che un insegnante risparmi 1000 € all'anno, che ogni fine anno depositi tale importo su un conto bancario che frutta un interesse annuo del 2,5% a capitalizzazione composta annuale. Quanti euro avrà sul conato dopo 30 anni?

In questo caso il numero di periodi n corrisponde al numero di anni n_a,per cui n = n_a = 30
la rata è A = 1000 €
il tasso di interesse vale $i=2,\%=\frac{2,5}{100}=0,025$ n = 5

si ha $F = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] = 1000\left[\frac{(1+0,025)^{30}-1}{0,025}\right] = 43902,70\,€$

Ammortamento (Pagamento)

In questo caso si è ottenuto un prestito ***P,*** la rata ***A***, costante, serve per la restituzione del prestito in ***n*** anni con un tasso di interesse ***i*** costante

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

Se si vuole conoscere il prestito ***P*** che è possibile chiedere, conoscendo la rata ***A*** che si desidera versare ogni anno per ***n*** anni con un tasso di interesse annuale costante ***i*** la relazione da utilizzare è:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$$

Esempio 06

Una famiglia deve chiedere un prestito per l'acquisto di una casa, conoscendo la rata massima che essa può pagare all'anno A = 5000 €, che il prestito sarà restituito in 20 anni con un tasso di interesse annuo del 3,5 %, , che il pagamento della rata sarà fatto ogni fine anno, calcolare il prestito massimo che può ottenere.

In questo caso il numero di periodi n corrisponde al numero di anni n_a,per cui n = n_a = 20

Il tasso di interesse vale $i=3{,}5\,,\%=\frac{3{,}5}{100}=0{,}035$

si ha: $P = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] = 5000\left[\frac{(1+0{,}035)^{20}-1}{0{,}035\cdot(1+0{,}035)^{20}}\right] = 71062{,}02$

Esempio 07

Con riferimento all'esercizio precedente si chiede di considerare il caso di pagamento semestrali posticipati.

In questo caso il numero di periodi n sarà n = 2* n_a = 40.
La rata sarà di 2500€

Il tasso di interesse vale $i=\frac{3{,}5\,\%}{2}=\frac{3{,}5\,\%}{2\cdot 100}=0{,}01575$

si ha $P = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] = 2500\left[\frac{(1+0{,}01575)^{40}-1}{0{,}01575\cdot(1+0{,}01575)^{40}}\right] = 83744{,}41\,€$

Esempio 07

Una società riceve in prestito di 50000 € da una banca e si impegna a restituire in 10 anni con rate annuali costanti posticipate con un tasso annuo di interesse del 4%.
Calcolare la rata annuale e definire il piano restituzione del debito.

In questo caso il numero di periodi n corrisponde al numero di anni n_a,per cui $n = n_a = 10$
IL capitale ricevuto P = 50000 €
il tasso di interesse vale $i=4,\%=\frac{4}{100}=0{,}04$ n = 5

si ha $A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] = 50000\left[\frac{0{,}04(1+0{,}04)^{10}}{(1+i)^{10}-1}\right]=6164{,}55\,€$

Alla fine del primo anno la società paga la prima rata, questa serve a pagare l'interesse maturato sui capitale iniziale P_1 = 50000 che vale $I_1=i\cdot P_1=0{,}04\cdot 50000=2000\,€$ Il debito restituito vale $R_1=A-I_1=6164{,}55-2000=4164{,}55$ Il debito residuo vale $D_1=P_1-R_1=50000-4164{,}55=45835{,}45\,€$

Alla fine del secondo anno si paga la rata A e si rifanno i calcoli la tabella che segue riporta il piano di restituzione del debito

anno	Interesse i	Rata A	Capitale residuo P_n	Interesse in Rata I_n	Debito pagato R_n	Debito residuo D_n
1	4	6164,55	50000	2000	4164,55	45835,45
2	4	6164,55	45835,45	1833,42	4331,13	41504,32
3	4	6164,55	41504,32	1660,17	4504,38	36999,94
4	4	6164,55	36999,94	1480	4684,55	32315,39
5	4	6164,55	32315,39	1292,62	4871,93	27443,45
6	4	6164,55	27443,45	1097,74	5066,81	22376,64
7	4	6164,55	22376,64	895,07	5269,48	17107,16
8	4	6164,55	17107,16	684,29	5480,26	11626,89
9	4	6164,55	11626,89	465,08	5699,47	5927,42
10	4	6164,55	5927,42	237,1	5927,45	-0,03